Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2014/2015

AM210 - Analisi Matematica 3 - Tutorato IV

Docente: Prof. Giovanni Mancini

Tutori: A. Mazzoccoli, M. Nanni

Si possono verificare gli esercizi consultando le soluzioni ai tutorati III e IV dell'A.A. 2013/2014.

Esercizio 1. Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^2$ e stabilire quali di essi sono di massimo e quali di minimo locale:

- $f_1(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2$
- $f_2(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$
- $f_3(x,y) = x^3 - 3xy^2$
- $f_4(x,y) = x^4 - x^3 \sin y$
- $f_5(x,y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$
- $f_6(x,y) = (y - x^2)(x^2 - y^2)^2$
- $f_7(x,y) = x^2y^2 + x^3 - x$
- $f_8(x,y) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + y^4 - 2y^2$
- $f_9(x,y) = y^4 - y^3 \cos x$
- $f_{10}(x,y) = x^2y^2 - \log x$
- $f_{11}(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$
- $f_{12}(x,y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4$
- $f_{13}(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2 - x^4 - y^4$
- $f_{14}(x,y) = e^{3x^2 + xy - 2y^2}$

Esercizio 2. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Calcolare il gradiente di f in coordinate polari.

Esercizio 3. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Calcolare il Laplaciano di $f(x,y)$ in coordinate polari e verificare la validità dell'uguaglianza ottenuta calcolando il laplaciano delle seguenti funzioni:

- $P(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $F(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2)$

Esercizio 4. Siano

$$g : (u,v,z) \in \mathbb{R}^3 \to (e^u, \cos(uvz)) \in \mathbb{R}^2,$$
$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (xy, x^2, y^6) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcolare $J_{g \circ f}$ verificando la regola della catena.

Esercizio 5. Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tali che:

- $g(0) = 0$;
- $f(t, g(t)) = 0 \ \forall \ t \in \mathbb{R}$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$

Usando la regola di derivazione per funzioni composte mostrare che:

$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}$$